L'article suivant a été publié dans le bulletin de liaison de l'IREM de Brest, "Taol Lagad" numéro 15 de septembre 1977.

Un Problème d'Ecoliers. Groupes de Quatre Elèves.

I- Le Problème.

Les élèves d'une classe sont répartis en quatre sous-ensembles A_i, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, de même cardinal n.

On forme n groupes de quatre élèves en prenant, pour chaque groupe, les élèves dans les quatre différents A_i.

La composition des groupes est revue chaque semaine pour que deux élèves ne se retrouvent pas plus d'une fois dans le même groupe.

Pendant combien de semaines peut-on changer la répartition des élèves ?

II- Carrés Latins.

Soit $E = \{0, 1, \ldots, n-1\} \subset \mathbb{N}$.

On appelle carré latin d'ordre n toute matrice carrée d'ordre n telle que l'ensemble des éléments de chaque ligne et de chaque colonne soit E.

Les éléments d'une même ligne ou colonne sont donc tous distincts. Contrairement à l'usage, mais pour simplifier la présentation en n'utilisant qu'un seul ensemble E, désignons par 0 la première ligne ou colonne, par 1 la seconde,..., par n-1 la dernière.

Deux carrés latins d'ordre n, C_1 et C_2, sont orthogonaux si l'ensemble des couples (a, b) d'éléments de C_1 et C_2 de mêmes lignes et colonnes est $E \times E$.

Exemple: Trois carrés latins d'ordre 4 deux à deux orthogonaux et superposition de deux d'entre eux (carré gréco-latin). Notation abrégée xy pour (x, y).

$$\begin{array}{|cccc|}\hline 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ \hline\end{array} \quad \begin{array}{|cccc|}\hline 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ \hline\end{array} \quad \begin{array}{|cccc|}\hline 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ \hline\end{array} \quad \begin{array}{|cccc|}\hline 00 & 11 & 22 & 33 \\ 13 & 02 & 31 & 20 \\ 21 & 30 & 03 & 12 \\ 32 & 23 & 10 & 01 \\ \hline\end{array}$$

Vérifier que l'on obtient bien les $4^2 = 16$ couples de $E \times E$.

D'après (1), le nombre X(n), nombre maximum de carrés latins deux à deux orthogonaux, est:

$X(2) = 1$, $X(3) = 2$, $X(4) = 3$, $X(5) = 4$, $X(6) = 1$, $X(10) \geqslant 2$, $X(12) \geqslant 5$; $X(21) \geqslant 4$, $X(n) = n-1$ si n est une puissance d'un naturel premier, $X(n) \geqslant 3$ si n est congru à 0 ou à 1 modulo 4.

III- Retour au Problème.

Représentons les éléments des quatre A_i par les éléments de E (ce qui revient à numéroter les élèves de chaque sous-ensemble A_i de 0 à n-1). Chaque groupe de quatre élèves est représenté par le quadruplet (a, b, c, d) où a, b, c et d désignent respectivement des élèves de A_1, A_2, A_3 et A_4.

a) Le nombre de semaines ne peut excéder n, l'élève 0 de A_1 rencontrant au plus les n élèves 0, 1,...,n-1 de A_2.

b) Soit F l'ensemble des quintuplets (i, a, b, c, d) indiquant que le groupe (a, b, c, d) est formé la semaine $i \in E = \{0, 1, \dots, n-1\}$. Chaque semaine l'ensemble des valeurs prises par a est E, on peut donc ranger ces quintuplets en une matrice d'ordre n, (i, a, b, c, d) placé à l'intersection de la ligne i et de la colonne a. L'information (i,a) se retrouvant par la position dans la matrice, il suffit d'indiquer uniquement la matrice des triplets (b, c, d).

Le problème posé est donc résolu en n semaines si et seulement si la matrice des triplets (b, c, d) est un carré bigréco-latin, c'est à dire la superposition de trois carrés latins deux à deux orthogonaux.

Exemple, n = 4.

carré bigréco-latin

000	111	222	333
123	032	301	210
231	320	013	102
312	203	130	021

Répartition

semaine 0	0000	1111	2222	3333
" 1	0123	1032	2301	3210
" 2	0231	1320	2013	3102
" 3	0312	1203	2130	3021

exemple, n= 9.

0000	1111	2222	3333	4444	5555	6666	7777	8888
0123	1204	2015	3456	4357	5348	6780	7861	8672
0216	1027	2108	3540	4351	5432	6873	7684	8765
0362	1470	2581	3605	4713	5824	6038	7146	8257
0485	1563	2374	3728	4806	5617	6152	7230	8041
0578	1386	2467	3812	4620	5701	6245	7053	8134
0631	1742	2850	3064	4175	5283	6307	7418	8526
0754	1835	2643	3187	4268	5076	6421	7502	8310
0847	1658	2736	3271	4082	5160	6514	7325	8403

IV- Constructions.

a) Si n est une puissance d'un naturel premier, il existe un corps (E, +, .) et les matrices $[a^r_{ij}]$, $r \in E^*$ donné, $a^r_{ij} = ri + j$, forment un ensemble de n-1 carrés latins deux à deux orthogonaux.

1° $a^r_{ij} = a^r_{kj} \longleftrightarrow ri+j = rk+j \longleftrightarrow r(i-k) = 0 \longleftrightarrow i-k = 0 \longleftrightarrow i = k.$

$a^r_{ij} = a^r_{ik} \longleftrightarrow ri+j = ri+k \longleftrightarrow j = k$

Montrent que deux éléments d'une même ligne ou d'une même colonne sont différents . La matrice est bien un carré latin.

2° Deux carrés d'indices r et s distincts sont orthogonaux .

De $(a^r_{ij}, a^s_{ij}) = (a^r_{kl}, a^s_{kl})$ on déduit:

$$\begin{cases} ri+j = rk+l \\ si+j = sk+l \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} (r-s)i = (r-s)k \\ r(i-k) + j = l \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} (r-s)(i-k) = 0 \\ r(i-k) + j = l \end{cases}$$

comme $r-s \neq 0$ est inversible, i = k et j = l , ce qui prouve l'unicité du couple (a^r_{ij}, a^s_{ij}).

b) Pour n impair non multiple de 3, $r \in \{1, 2, 3\}$, $(E, +, .)$ étant l'anneau $(Z/nZ, +, .)$ des classes résiduelles d'entiers, modulo n, comme dans le a) précédent, les trois matrices $\left[a^r_{ij}\right]$, $a^r_{ij} = ri + j$, donnent trois carrés latins deux à deux orthogonaux. $(n \geqslant 5)$.

On montre alors que 1, 2, 3, sont inversibles, la suite de la démonstration se fait alors comme dans a).

c) Etant donné p carrés latins d'ordre n : $\left[a^r_{ij}\right]$, $r \in \{1,\dots,p\}$, deux à deux orthogonaux et p carrés latins d'ordre m : $\left[b^r_{kl}\right]$ deux à deux orthogonaux, on construit p carrés latins $\left[c^r_{xy}\right]$ d'ordre mn et deux à deux orthogonaux en prenant:

$$c^r_{xy} = n.b^r_{kl} + a^r_{ij} \quad \text{quand } x = nk + i \text{ et } y = nl + j.$$

V- Autre Problème. (voir (2)).

Les 4n élèves de la classe son répartis en deux sous-ensembles B_1 et B_2 de même cardinal 2n.

On forme n groupes de quatre élèves en prenant, pour chaque groupe, deux élèves dans B_1 et deux élèves dans B_2.

Pendant combien de semaines peut-on changer la répartition des élèves, deux élèves ne devant pas se retrouver plus d'une fois dans le même groupe ?

L'élève a de B_1 rencontrant chaque fois deux nouveaux élèves de B_2, la répartition ne peut être changée plus de n semaines. Sa formulation, plus générale que celle du précédent , permet-elle de donner à ce problème de nouvelles solutions en n semaines ? Toutes les solutions de (2) permettent une partition de l'ensemble des élèves en quatre sous-ensembles de n élèves et sont donc (aux notations près) des solutions de I-.

DAVALAN J.-P.

Références:

(1) Les Carrés Magiques. B. Belouze, M. Glaymann, P.J. Haug et J.C. Herz. Publication de l' A.P.M.E.P.

(2) Planter ou Transplanter ? P. Plougonven. TAOL LAGAD n° 3. Avril 1976. page 16.